

# Teoria do Risco

## Aula 8

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



<https://atuaria.github.io/portahalley/index.html>

➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. Modelo de risco individual: Aproximação pela Normal . [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: [https://atuaria.github.io/portalthalley/notas\\_TR.html](https://atuaria.github.io/portalthalley/notas_TR.html). Acessado em: 28 jun. 2025.

## Modelo de Risco individual

$X_i$  Independentes

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n B_i I_i$$

$$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$S_{ind}, X_i, B_i, I_i$

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 q_i(1 - q_i)$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{B_i}(x_i)q_i + (1 - q_i)I_{[0, \infty)}(x_i)$$

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} (1 - q_i), & \text{se } x_i = 0 \\ q_i f_{B_i}(x), & \text{se } x_i > 0 \end{cases}$$

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int_0^s f_Y(s - x)f_X(x)dx$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int_0^s F_Y(s - x)f_X(x)dx$$

$$P_S(s) = P_X * P_Y(s) = \sum_{\forall x \leq s} P_Y(s - x)P_X(x)$$

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \sum_{\forall x \leq s} F_Y(s - x)P_X(x)$$

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

Soluções analíticas com fórmulas fechadas para distribuições resultantes da convolução nem sempre são possíveis...

Sempre que necessário podemos recorrer a métodos de aproximação para o valor total das indenizações.

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

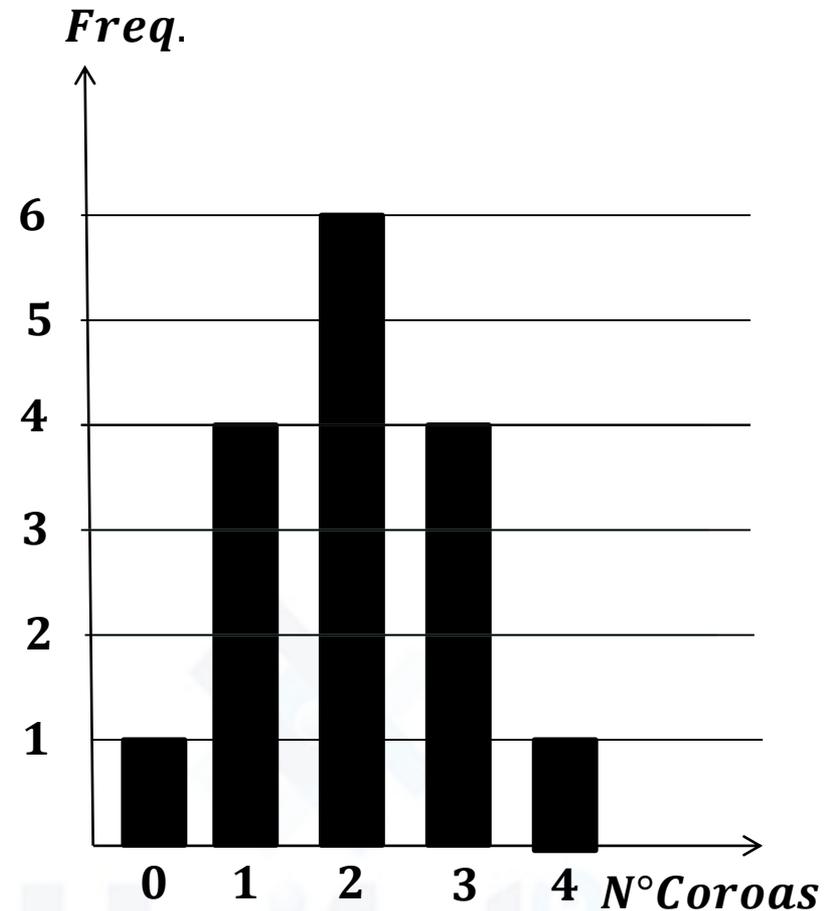
O teorema central do limite é um poderoso teorema da estatística.

Em teoria das probabilidades, esse teorema afirma que a distribuição da soma amostral aproxima-se da distribuição normal à medida que o número de elementos que compõem a soma aumenta. Consequentemente, o teorema se estende à distribuição das médias amostrais.

**EXEMPLO 1:** Suponha o lançamento de 4 moedas, representaremos 1 como os casos que aconteceram coroa e 0 os casos que ocorreram cara, assim vamos avaliar todos os possíveis resultados nesse experimento e avaliar a soma de coroas que podem acontecer:



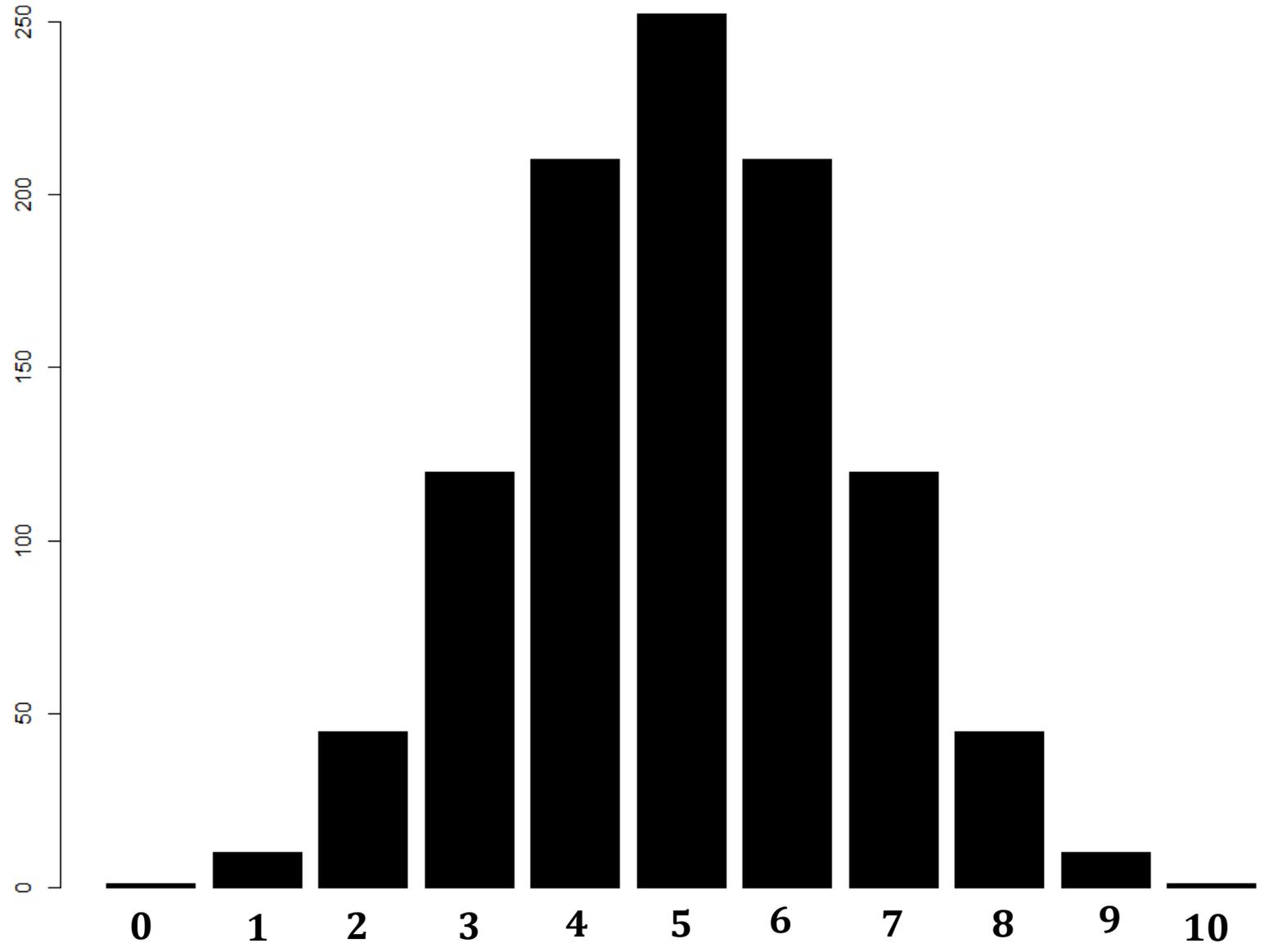
Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4	Nº de coroas
Cara	Cara	Cara	Cara	0
<b>Coroa</b>	Cara	Cara	Cara	1
Cara	<b>Coroa</b>	Cara	Cara	1
Cara	Cara	<b>Coroa</b>	Cara	1
Cara	Cara	Cara	<b>Coroa</b>	1
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara	Cara	2
<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>	Cara	2
<b>Coroa</b>	Cara	Cara	<b>Coroa</b>	2
Cara	<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>	2
Cara	Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	2
Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara	2
Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	3
<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	3
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara	<b>Coroa</b>	3
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	Cara	3
<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	<b>Coroa</b>	4



Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

# 10 moedas

*Freq.*



*N°Coroas*

➤ Definição:

Seja  $S_n$  uma variável aleatória correspondente a uma soma de  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Então, se  $n$  tende ao infinito, temos:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$Z_n \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Logo

$$E(S_n) = n\mu \quad \text{var}(S_n) = \sigma^2 n$$

$$S_n \sim N(n\mu, \sigma^2 n)$$

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

Então o Teorema central do limite sugere uma metodologia aproximada para a obtenção de valores para distribuição da soma de variáveis independentes, conseqüentemente também para a distribuição da média de variáveis aleatórias.

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad \text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

...se aplica bem quando não se conhece a distribuição de  $S_{ind}$ , ou sua obtenção é trabalhosa.

Condições do Teorema Central do Limite,

→  $X_i$  independentes e **identicamente distribuídos**,

→  $X_i$  deve ter variância finita.

→ O número de sinistros tem que ser grande e não somente o número de apólices ( $n$ ).

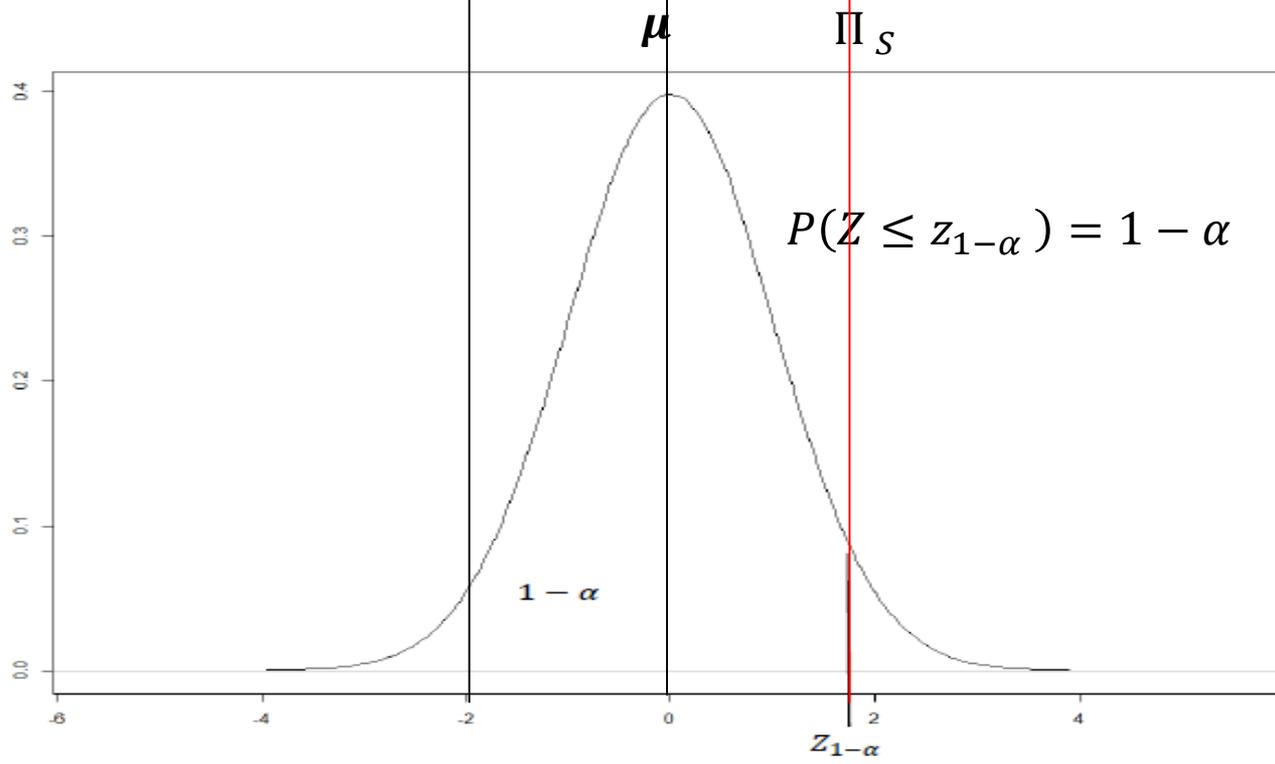
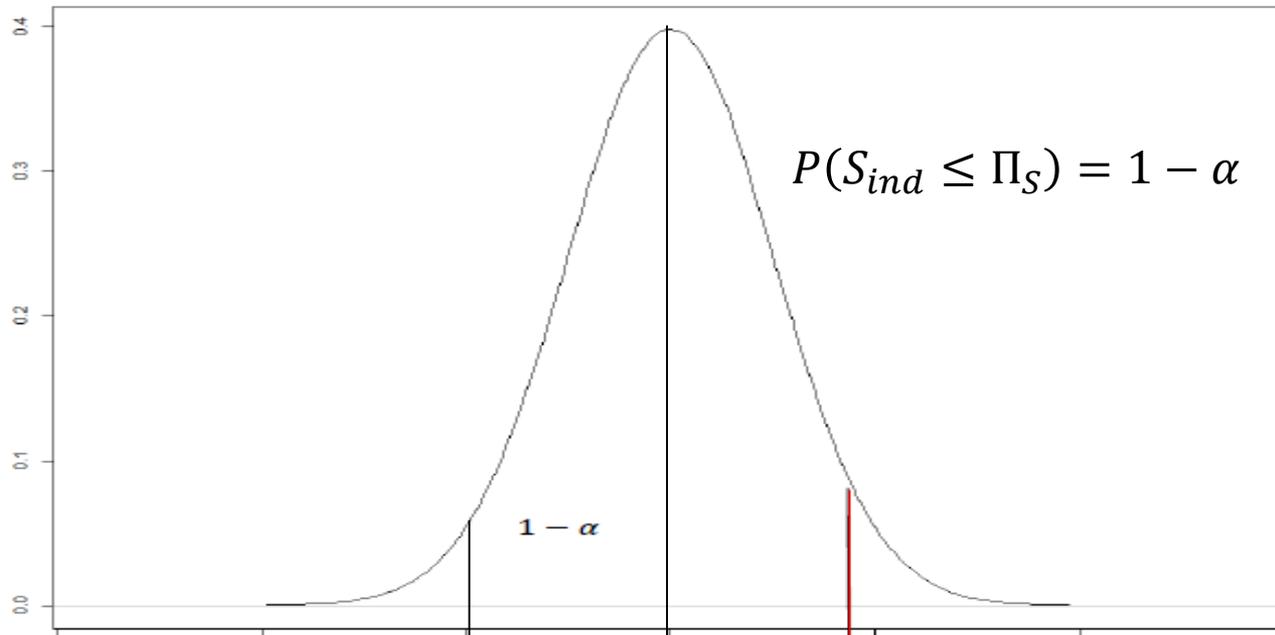
## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

Uma interessante aplicação da aproximação de  $S_{ind}$  pela distribuição normal é sua utilização para obtenção de um prêmio ( $\Pi_S$ ) baseado em uma probabilidade ( $\alpha$ ) das indenizações superarem esse prêmio.

$$P(S_{ind} \geq \Pi_S) = \alpha$$



\*Princípio do percentil



## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

$$P(S_{ind} \leq \Pi_S) = 1 - \alpha$$

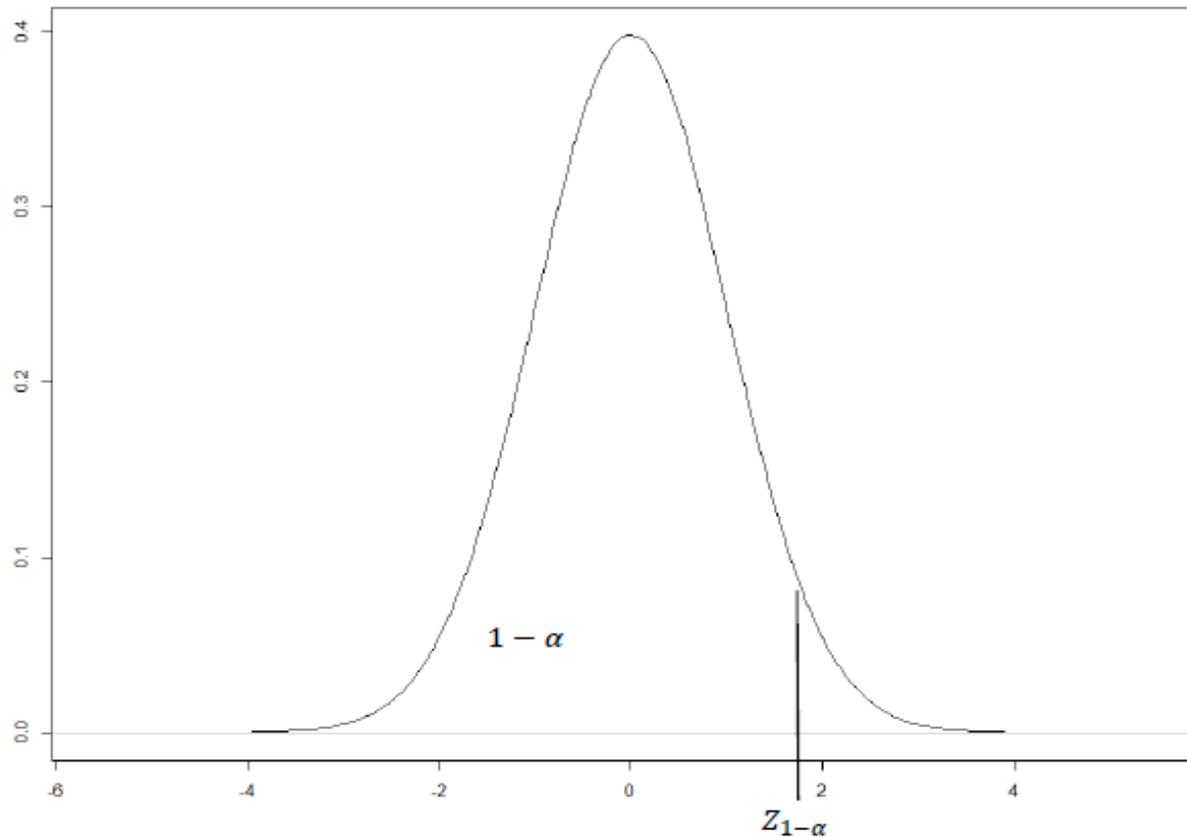
$$P\left(\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} \leq \frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$

Tem-se que  $\frac{S_{ind} - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu_X}{\sigma_X \sqrt{n}} = Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Pois  $\sigma_{S_{ind}}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = n\sigma_X^2$ , assim  $\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{n\sigma_X^2} = \sigma_X \sqrt{n}$

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}}\right) = 1 - \alpha$$



## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

$$\frac{\Pi_S - E(S_{ind})}{\sigma_{S_{ind}}} = z_{1-\alpha}$$

$$\Pi_S = z_{1-\alpha}\sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind})$$

A partir dessas condições, pode-se calcular o carregamento de segurança ( $\theta$ ) utilizado no princípio do prêmio carregado.

$$\Pi_S = E(S_{ind})(1 + \theta)$$

## Modelos de risco Individual-Aproximação de $S_{ind}$ pela distribuição Normal

$$\Pi_S = z_{1-\alpha} \sigma_{S_{ind}} + E(S_{ind}) \quad (1)$$

$$\Pi_S = E(S_{ind}) + \theta E(S_{ind}) \quad (2)$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

- Quanto menor a probabilidade do sinistro agregado superar o prêmio puro total da carteira, maior terá que ser o carregamento de segurança.
- Quanto maior o desvio padrão do sinistro agregado em relação à média do sinistro, maior será o carregamento de segurança.

**EXEMPLO 2:** Uma carteira de seguro de vida possui 3 faixas de importâncias seguradas: \$10 000, \$30 000 e \$50 000. O número de apólices em cada faixa é de 200 000, 300 000 e 100 000, respectivamente. Em cada uma dessas 3 faixas a probabilidade de morte em 1 ano é de 0,01 , 0,005 e 0,02 respectivamente.

Calcular o carregamento de segurança e o prêmio puro total anual de forma que a probabilidade de o valor do sinistro exceder o prêmio puro total anual não ultrapasse 5%, utilizando a aproximação Normal para  $S_{ind}$ .

$$S_{ind} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{200000}) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{300000}) + (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{100000})$$

$B_i$	$P(B_i)$	$I_i$	$P(I_i)$	$X_i$	$P(X_i)$
		0	0,99	0	0,99
1	\$10000	1	0,01	\$10000	0,01
				$Y_i$	$P(Y_i)$
		0	0,995	0	0,995
1	\$30000	1	0,005	\$30000	0,005
				$Z_i$	$P(Z_i)$
		0	0,98	0	0,98
1	\$50000	1	0,02	\$50000	0,02

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n B_i^2 q_i (1 - q_i).$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0,01 \times 10000,00 + \sum_{i=1}^{300000} 0,005 \times 30000,00 + \sum_{i=1}^{100000} 0,02 \times 50000,00$$

---

$$E(S_{ind}) = \$165000\ 000,00$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200000} 0,01 \times 0,99 \times (10000,00)^2 + \sum_{i=1}^{300000} 0,005 \times 0,995 \times (30000,00)^2 +$$
$$\sum_{i=1}^{100000} 0,02 \times 0,98 \times (50000,00)^2 = \$^2 6,44125 \times 10^{12}$$

---

$$\Pi_S = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} z_{0,95} = R\$169\ 174\ 947$$

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})} = \frac{2537962}{165000\ 000} 1,645 \approx 2,53\%$$

**EXEMPLO 3:** A probabilidade de ocorrer um sinistro devido a um vendaval em um seguro residencial é de 0,01. Seja uma carteira com 200 apólices e com o valor de cada sinistro ocorrendo de acordo com uma distribuição Exponencial ( $\alpha = 0,0001$ ).

Calcular o carregamento de segurança de forma que a probabilidade de o valor do sinistro exceder o prêmio puro total anual não ultrapasse 5%, utilizando a aproximação Normal para  $S_{ind}$ .

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

$$E(B_i) = \frac{1}{0,0001} = 10000$$

$$\text{var}(B_i) = (10000)^2$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i)$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} 0,01 \times 10000,00 = 200 \times 100 = \$20000,00$$

---

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{200} (10000)^2(0,01) + (10000)^2(0,01)(0,99)$$

$$\text{var}(S_{ind}) = \$^2 398000000$$

---

$$\theta = \frac{\sigma_{S_{ind}} Z_{1-\alpha}}{E(S_{ind})}$$

$$\theta = \frac{R\$19949,94(1,645)}{R\$20000} \approx 1,64$$

**EXEMPLO 4:** Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

<i>IS</i> (\$)	10000	15000	20000	30000	100000
N° de Apólices	55	70	50	20	5

A probabilidade de ocorrer um desmoronamento em uma residência em 1 ano é de 0,01. Os valores dos sinistros seguem uma distribuição Uniforme (0, IS). Calcule o prêmio puro total anual que a seguradora deve cobrar de modo que a probabilidade do sinistro agregado anual superar o prêmio puro total anual não exceda a 5%, considerando uma aproximação Normal para o sinistro agregado;

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)q_i$$
$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)$$

Uma seguradora cobre o risco de desmoronamento em um seguro residencial em uma carteira com 200 residências, conforme a seguinte distribuição de importância segurada (IS):

<i>IS</i> (\$)	10000	15000	20000	30000	100000
Nº de Apólices	55	70	50	20	5

$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

Logo

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n E(B_i)E(I_i) ,$$

$$E(S_{ind}) = 0,01 \left( \sum_{i=1}^{55} \frac{10000}{2} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000}{2} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000}{2} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000}{2} + \sum_{i=1}^5 \frac{100000}{2} \right)$$

$$\approx \$18500,00$$

$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

$$\text{var}(S_{ind}) = \sum_{i=1}^n \text{var}(B_i)q_i + \sum_{i=1}^n E(B_i)^2 \text{var}(I_i),$$

$$\begin{aligned} \text{var}(S_{ind}) = & 0,01 \left( \sum_{i=1}^{55} \frac{10000^2}{12} + \sum_{i=1}^{70} \frac{15000^2}{12} + \sum_{i=1}^{50} \frac{20000^2}{12} + \sum_{i=1}^{20} \frac{30000^2}{12} + \sum_{i=1}^5 \frac{100000^2}{12} \right) \\ & + 0,0099 \left[ \sum_{i=1}^{55} \left( \frac{10000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{70} \left( \frac{15000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{50} \left( \frac{20000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{20} \left( \frac{30000}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{100000}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{var}(S_{ind}) \approx \mathbf{361435417}$$

$$\sigma_{S_{ind}} = \sqrt{361435417} \approx \mathbf{19011,45}$$

$$S_{ind} = (X_1 + \dots + X_{55}) + (Y_1 + \dots + Y_{70}) + (Z_1 + \dots + Z_{50}) + (U_1 + \dots + U_{20}) + (V_1 + \dots + V_5).$$

$$E(S_{ind}) \approx \$18500,00$$

$$\text{var}(S_{ind}) \approx \$^2 361435417$$

$$\sigma_{S_{ind}} \approx 19011,45$$

Finalmente o prêmio puro é obtido.

$$\Pi = E(S_{ind}) + \sigma_{S_{ind}} Z_{0,95}$$

$$\Pi = R\$18500,00 + R\$19011,45(1,645) = \$49773,84$$

# Modelo de Risco Individual

## Vantagens

Precisão,  
Maior controle das variáveis envolvidas,  
Facilidade em “repartir” o prêmio global entre as apólices,  
Flexibilidade nas distribuições,...

## Desvantagem

Dificuldade no processo de modelagem,  
Não é usual o modelo com evolução temporal,...  
Número de segurados fixo e conhecido,...  
O segurado só pode ter um evento indenizável por período

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Deiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV, 2020.

